EDP pour les options asiatiques

Introduction à la Recherche en Laboratoire

Kévin BONKOSKI

kevin.bonkoski@ensimag.grenoble-inp.fr

Jeudi 21 Mai 2015

Plan de la présentation

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

Grenoble INP ensimag

1 Introduction

2 Les options européennes

3 Les options asiatiques

4 Conclusion

Plan de la présentation

Introduction
Définitions
Le pricing

Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson

Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing

Conclusion

1 Introduction

2 Les options européennes

3 Les options asiatiques

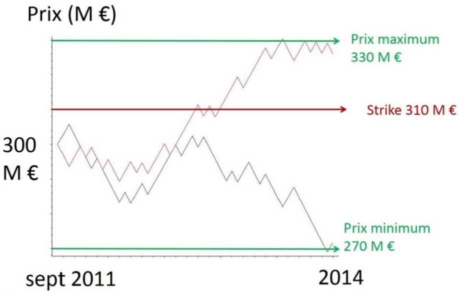
4 Conclusion

Un produit dérivé : les options

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

Une option :

Assurance qui donne à son détenteur le droit d'acheter ou vendre un actif financier à une date convenue et à un prix fixé à l'avance.



Pricing d'options

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

- **Objectif :** «Pricer» des options vanilles et asiatiques
- **Les options européennes :** la formule fermée de Black–Scholes donne un prix exact
- **Les autres :** on a recourt à des méthodes numériques telles que
  - les **Arbres Binomiaux**
  - la méthode de **Monte–Carlo**
  - la résolution d'**EDP**

Plan de la présentation

Introduction
- Définitions
- Le pricing

Les options européennes
- Le modèle
- La formule fermée
- La résolution de l'EDP
  - La méthode explicite
  - La méthode implicite
  - La méthode de Crank–Nicolson

Les options asiatiques
- La méthode de splitting
- Le pricing

Conclusion

1 Introduction

2 Les options européennes

3 Les options asiatiques

4 Conclusion

Les hypothèses du modèle

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

Les hypothèses fondamentales

- Mouvement Brownien géométrique

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

- Hypothèse de non-arbitrage

Passage du monde stochastique au déterministe

- Lemme d'Itô

Équation de Black-Scholes

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

Équation (E)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\dfrac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \\ V(S,t) = (K-S)_+. \end{cases}$$

Avec de bons changements de variables

Équation (E_1)

- Changement de variable $\Phi(x, t) = V(S, t)$ avec $S = Ke^x$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, t) + \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x, t) + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, t) + \gamma \Phi(x, t) = 0,$$

avec $\alpha = \frac{\sigma^2}{2}, \beta = r - \frac{\sigma^2}{2}$ et $\gamma = -r$

Équation (E_2)

- Changement de variable $y(x, \tau) = e^{-\gamma x - \omega \tau} \Phi(x, t)$ avec $\tau = (T - t)\sigma^2$

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

Solution de l'équation (E_3)

$$V(S,t) = Ke^{-rt}\mathcal{F}_{\mathcal{N}}(-d_2) - S\mathcal{F}_{\mathcal{N}}(-d_1),$$

où

$$\begin{cases} d_2 = \dfrac{\ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \\ d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t} = \dfrac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \end{cases}$$

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

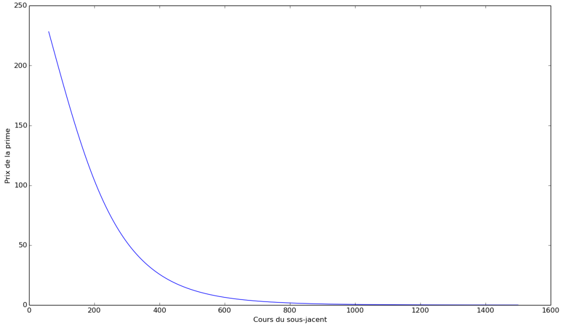


Figure: Prix de la prime d'une option vanille obtenu grâce à la formule fermée de Black–Scholes — $K = 300$, $r = 4\%$, $T = 1$ an et $\sigma = 0.5$

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

Repartons de l'équation (E_1)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t) + \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t) + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t) + \gamma \Phi(x,t) = 0,$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\sigma^2}{2}, \\ \beta = r - \frac{\sigma^2}{2}, \\ \gamma = -r. \end{cases}$$

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l’EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

On discrétise les variables

- $\forall n \in [\![0, N]\!], t^n = t^0 + n\delta t = t^0 + n\frac{T}{N},$
- $t^0 = 0$ et $t^N = T$.
- $\forall i \in [\![0, M]\!], x_i = x_0 + n\frac{x_M - x_0}{M},$
- $x_0 = x_{min}$ et $x_M = x_{max}$.

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

Les formules

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_i, t^{n+\frac{1}{2}}) \simeq \theta \frac{\Phi_{i+1}^n - \Phi_{i-1}^n}{2\delta x} + (1-\theta)\frac{\Phi_{i+1}^{n-1} - \Phi_{i-1}^{n-1}}{2\delta x},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x_i, t^{n+\frac{1}{2}}) \simeq \theta \frac{\Phi_{i+1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i-1}^n}{\delta x^2} + (1-\theta)\frac{\Phi_{i+1}^{n-1} - 2\Phi_i^{n-1} + \Phi_{i-1}^{n-1}}{\delta x^2},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_i, t^{n+\frac{1}{2}}) \simeq \frac{\Phi_i^n - \Phi_i^{n-1}}{\delta t}.$$

- $\theta = 1 \longrightarrow$ méthode explicite
- $\theta = 0 \longrightarrow$ méthode implicite
- $\theta = 1/2 \longrightarrow$ méthode de Crank–Nicolson

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

La méthode

- En prenant $\theta = 1$
- En remplaçant dans (E_1)

$$\Phi_i^{n-1} = \xi_1 \Phi_{i+1}^n + \xi_2 \Phi_i^n + \xi_3 \Phi_{i-1}^n$$

avec $\xi_1 = \delta t(\frac{\alpha}{\delta x^2} + \frac{\beta}{2\delta x}), \xi_2 = \delta t(\frac{1}{\delta t} - \frac{2\alpha}{\delta x^2} + \gamma)$ et $\xi_3 = \delta t(\frac{\alpha}{\delta x^2} - \frac{\beta}{2\delta x})$

Les conditions de bords

- Condition de Neumann : $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x = x_M) = 0 \Leftrightarrow \forall n, \Phi_M^n = \Phi_{M-1}^n$
- Condition de Dirichlet : $\Phi_0^n = (K - S_0)e^{-r(T-t^n)}$

La méthode explicite

Cherchons Φ^{n-1} tel que

$$\Phi^{n-1} = A\Phi^n + C^n$$

$$A = \begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \xi_3 & \xi_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \xi_2 & \xi_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \xi_3 & \xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix}, C^n = \begin{pmatrix} \xi_3(K - S_0)e^{-r(t^N - t^n)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Simulation PYTHON

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

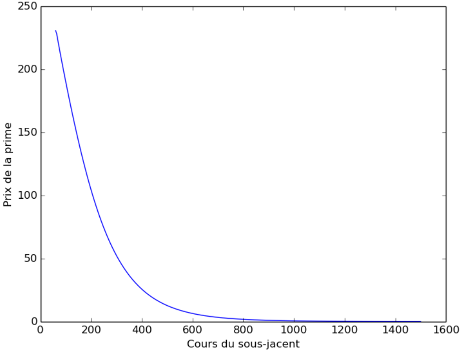


Figure: Résolution de l'EDP avec la méthode explicite pour une option vanille - $K = 300, r = 4\%$ et $\sigma = 0.5$ — $\alpha\delta t/\delta x^2 = 0.962$

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

La méthode

- On prend $\theta = 0$ et les mêmes conditions de bords
- Cherchons Φ^{n-1} tel que :

$$\Phi^n = B\Phi^{n-1} + C^n \Leftrightarrow \Phi^n - C^n = B\Phi^{n-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} \zeta_2 & \zeta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \zeta_3 & \zeta_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \zeta_2 & \zeta_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \zeta_3 & \zeta_1 + \zeta_2 \end{pmatrix}, C^n = \begin{pmatrix} \zeta_3 (K - S_0) e^{-r(T - t^{n-1})} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $\zeta_1 = -\delta t(\frac{\alpha}{\delta x^2} + \frac{\beta}{2\delta x}), \zeta_2 = \delta t(\frac{1}{\delta t} + \frac{2\alpha}{\delta x^2} - \gamma)$ et $\zeta_3 = \delta t(\frac{\beta}{2\delta x} - \frac{\alpha}{\delta x^2})$

Simulation PYTHON

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

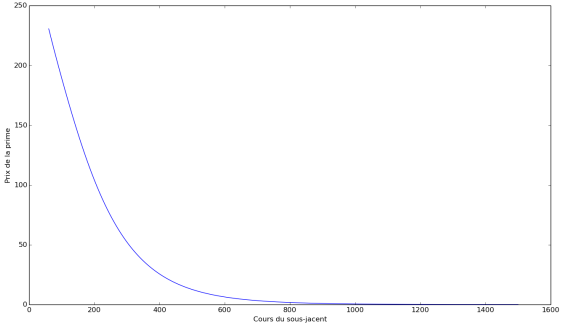


Figure: Résolution de l'EDP avec la méthode implicite pour une option vanille - $K = 300$, $T = 1$, $r = 4\%$ et $\sigma = 0.5$

La méthode de Crank–Nicolson

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

La méthode

- On prend $\theta = 1/2$ et les mêmes conditions de bords
- Cherchons Φ^{n-1} tel que :

$$B\Phi^{n-1} = A\Phi^n + C^n$$

A, B les matrices déjà définies et $C^n = \begin{pmatrix} \xi_3 - (\zeta_3 e^{r\delta t})[Ke^{-r(t^N - t^n)}] \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Simulation PYTHON

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

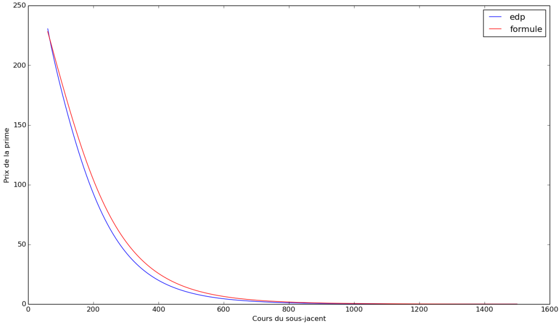


Figure: Résolution de l'EDP avec la méthode de Crank-Nicolson et de la formule fermée pour une option vanille – $K = 300$, $T = 1$, $r = 4\%$ et $\sigma = 0.5$

Plan de la présentation

Introduction
- Définitions
- Le pricing

Les options européennes
- Le modèle
- La formule fermée
- La résolution de l'EDP
  - La méthode explicite
  - La méthode implicite
  - La méthode de Crank–Nicolson

Les options asiatiques
- La méthode de splitting
- Le pricing

Conclusion

1 Introduction

2 Les options européennes

3 Les options asiatiques

4 Conclusion

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

Passage du monde stochastique au déterministe

- Moyenne arithmétique continue

$$A = \int_0^t f(S_s, s)ds$$

- En utilisant les même hypothèses que pour le modèle de Black–Scholes et en vertu du lemme d'Itô

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t,A)+\alpha\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t,A)+\beta\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t,A)+\gamma\Phi(x,t,A)+f(x,t)\frac{\partial \Phi}{\partial A}(x,t,A)=0$$

avec $\alpha = \frac{\sigma^2}{2}$, $\beta = r - \frac{\sigma^2}{2}$ et $\gamma = -r$

- $f(S_t, t) = S_t \Rightarrow f(x,t) = e^x/K$

Equation aux dérivées partielles

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

Équation (E_3)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t,A) + \alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(x,t,A) + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,t,A) + \gamma \Phi(x,t,A) + \frac{e^x}{K}\frac{\partial \Phi}{\partial A}(x,t,A) = 0,$$

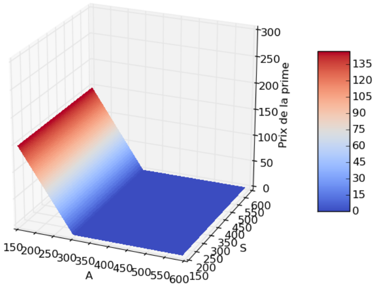
avec

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\sigma^2}{2}, \\ \beta = r - \dfrac{\sigma^2}{2}, \\ \gamma = -r. \end{cases}$$

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

Le pay-off change

$$V(S_T, T, A) = (K - A)_+$$



Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

Les 2 étapes

- Black–Scholes pour tout A :

$$\frac{\partial z}{\partial t}(x,t,A) + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,t,A) + \beta \frac{\partial z}{\partial x}(x,t,A) + \gamma z(x,t,A) = 0$$

- Équation d'advection pour tout x :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x,t,A) + \frac{e^x}{K}\frac{\partial \Phi}{\partial A}(x,t,A) = 0$$

$$\Phi_{i,j}^n = \Phi_{i,j}^{n+1} + \frac{\delta t}{\delta A}\frac{e^x}{K}(u_{x,j+1}^{n+1} - u_j^{n+1})$$

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

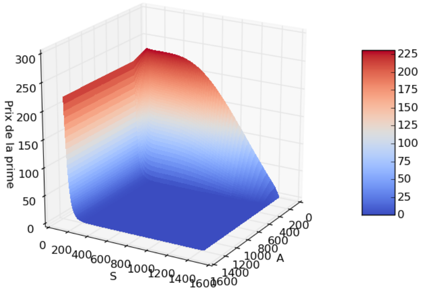


Figure: Résolution de l'EDP d'une option asiatique via une méthode de splitting — $K = 300$, $r = 4\%$ et $\sigma = 0.5$ — $T = 1$

Conclusion

Introduction
Définitions
Le pricing
Les options européennes
Le modèle
La formule fermée
La résolution de l'EDP
La méthode explicite
La méthode implicite
La méthode de Crank–Nicolson
Les options asiatiques
La méthode de splitting
Le pricing
Conclusion

- *Arbres binomiaux appliqués à la Finance*
- Résolution d'**EDP** : méthode alternative à **Monte–Carlo** ?
- Changement de variables $u = S/A : 2D \longrightarrow 1D$
- Cependant résolution 2D : problème de condition de bords

Merci pour votre attention.

Grenoble INP
Ensimag