

# Atteignabilité de Haute Dimension des Systèmes Affines par des Projections en Basse Dimension

Frédéric Viry



Sous la direction de : **Goran Frehse** et **Marcelo Forets**

Laboratoire Verimag, Grenoble

Soutenance présidée par : **Christophe Picard**

Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble

Rapporteur : **Antoine Girard**

Laboratoire des Signaux et Systèmes, CentraleSupélec, Gif sur Yvette

16 mai 2017

# Atteignabilité des Systèmes Affines

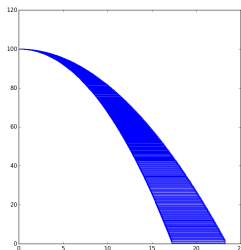
## Système affine

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$x \in \mathbb{R}^n$  état du système,  $u(t) \in \mathcal{U}$  entrée/perturbation du système

- Assez *simples* pour être étudiés
- Assez *complexes* pour des applications industrielles

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$



# Contexte de cette IRL

## Problème actuel

Passage en haute dimension trop coûteux.

Travaux en cours sur le découplage de variables par transformations de coordonnées : passage en dimension plus petite

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

## But

Fournir une preuve de concept

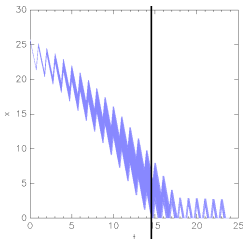


# Problème

## But

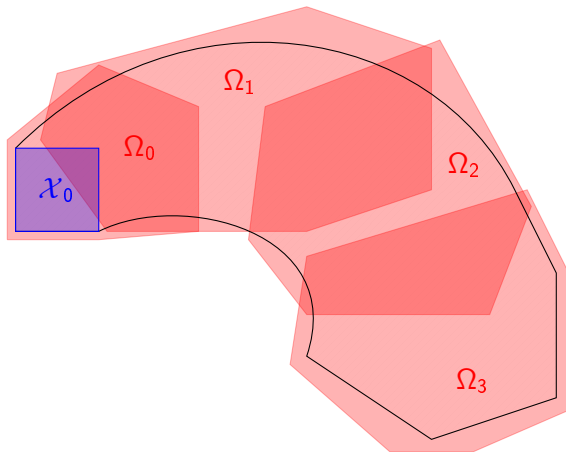
Calculer l'ensemble des états atteignables par le système avec :

- $\mathcal{X}_0$  : ensemble des états initiaux du système
- $\mathcal{U}$  : ensemble des entrées possibles
- $T$  : horizon du temps



Evolution volume d'eau dans  
le lac Mead dans le temps

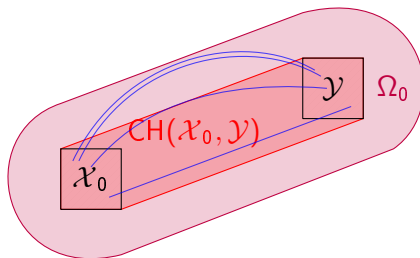
# Etape 1 : Discrétisation par Rapport au Temps



# Etape 1 : Discrétisation par Rapport au Temps

## Construction de $\Omega_0$

- (i) Partant de  $\mathcal{X}_0$ , trouver un ensemble  $\mathcal{Y}$  contenant les états après un temps  $\delta$
- (ii) Prendre l'enveloppe convexe de ces deux ensembles
- (iii) "Grossir" cet ensemble : contenir les trajectoires entre 0 et  $\delta$



# Etape 1 : Discrétisation par Rapport au Temps

$\Omega_{k+1}$  est construit de manière similaire, partant de  $\Omega_k$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{k+1} := \Phi \Omega_k \oplus \delta \mathcal{V} \oplus \beta_\delta \mathcal{B} \\ \Omega_0 := \text{CH}(\mathcal{X}_0, \Phi \mathcal{X}_0 \oplus \delta \mathcal{V} \oplus \alpha_\delta \mathcal{B}) \\ \Phi := e^{\delta A} \\ \mathcal{V} := B\mathcal{U} \end{array} \right.$$

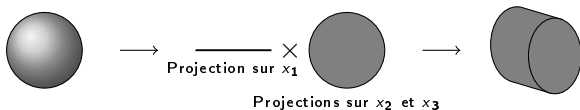


## Etape 2 : Décomposition par Projections

La matrice  $\Phi$  peut se découper en sous-blocs :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{1,1} & \cdots & \Phi_{1,b} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_{b,1} & \cdots & \Phi_{b,b} \end{pmatrix}$$

Les ensembles  $\Omega_k$  peuvent se décomposer par projections :





## Etape 2 : Décomposition par Projections

On construit une surapproximation  $\widehat{\Omega}_0$  de  $\Omega_0$  en combinant  $b$  projections :

$$\widehat{\Omega}_0 := \pi_1(\Omega_0) \times \cdots \times \pi_b(\Omega_0)$$

On construit par récurrence  $\widehat{\Omega}_k = \widehat{\Omega}_k^{(1)} \times \cdots \times \widehat{\Omega}_k^{(b)}$ , qui surapproxime  $\Omega_k$  :

$$\widehat{\Omega}_{k+1}^{(i)} = \bigoplus_{j=1}^b \Phi_{i,j} \widehat{\Omega}_k^{(j)} \oplus \delta \pi_i(\mathcal{V}) \oplus \beta_\delta \pi_i(\mathcal{B}), \quad \forall i \in \{1, \dots, b\}$$



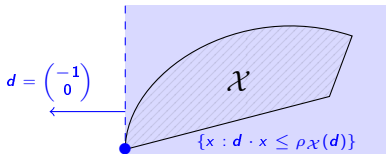
# Etape 3 : Approximations Polyédrales

## Fonction support

Soit  $\mathcal{X}$  un ensemble convexe et compact. Sa fonction support est notée  $\rho_{\mathcal{X}}$  et :

$$\rho_{\mathcal{X}}(d) = \max_{x \in \mathcal{X}} d \cdot x$$

- Interprétation géométrique

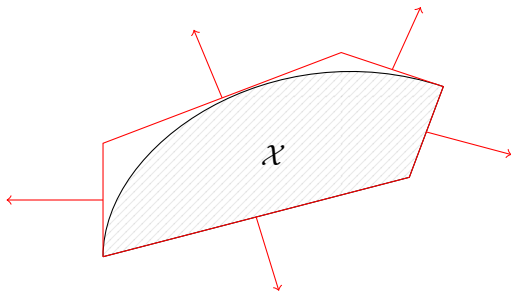


- Opérations ensemblistes rapides

$$\begin{cases} \rho_{\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}}(d) = \rho_{\mathcal{X}}(d) + \rho_{\mathcal{Y}}(d) \\ \rho_{\text{CH}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})}(d) = \max\{\rho_{\mathcal{X}}(d), \rho_{\mathcal{Y}}(d)\} \\ \rho_{M\mathcal{X}}(d) = \rho_{\mathcal{X}}(M^T d) \end{cases}$$

## Etape 3 : Approximations Polyédrales

Il est possible de surapproximer un ensemble convexe par évaluation de sa fonction support dans un ensemble de directions de l'espace.



## Etape 3 : Approximations Polyédrales

### Approximation sans projections

$$O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right)$$

contraintes linéaires sont nécessaires pour assurer une borne d'erreur  $\varepsilon > 0$ .

### Approximation par projections 2-D

$$\frac{n}{2} O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

contraintes linéaires sont nécessaires pour assurer une borne d'erreur  $\varepsilon > 0$  sur chaque sous-ensembles de variables.



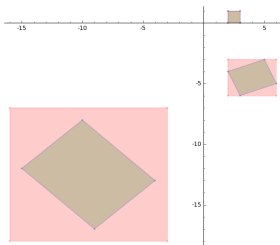
# Caractéristiques de la Méthode

## Avantages

- Approximation peu coûteuse des projections
- On peut borner l'erreur d'approximation sur les projections

## Inconvénients

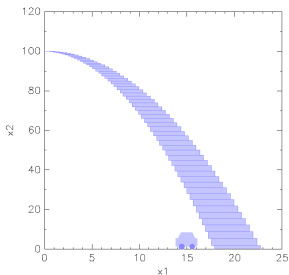
On peut s'attendre à une accumulation incontrôlée de l'erreur, appelée *effet d'emballage*, à cause de la formule de récurrence et des projections.



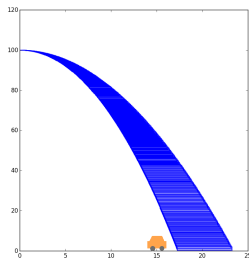
# Lancer de Projectile

## Enoncé

Quelqu'un lance une balle de  $1\text{kg}$  à vitesse horizontale initiale entre  $4$  et  $5\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  depuis le haut d'un immeuble de  $100\text{m}$  de haut. Ma voiture est garée  $15\text{m}$  plus loin dans la rue. La boule va-t-elle tomber sur ma voiture ?



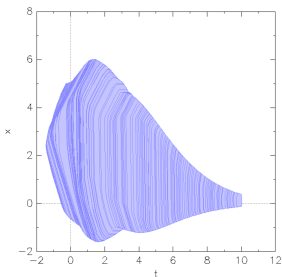
résultat de SpaceEx



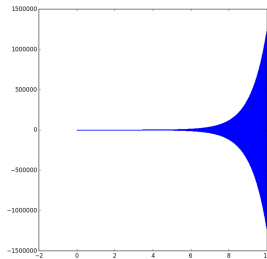
résultat de la méthode

# Pont Roulant d'une Grue

Exemple provenant d'un livre sur la théorie du contrôle.  
Il est nécessaire ici de ne pas borner l'erreur sur les projections  
(sinon temps de calcul trop élevé).



résultat de SpaceEx



résultat de la méthode

→ Accumulation d'erreur rendant le résultat inexploitable.

# Conclusions

- Formalisation de la décomposition du système discret.
- L'effet d'emballage peut mettre à défaut la méthode. C'est corrigible en cassant la récurrence (à mettre en pratique).
- Développement d'un environnement de calcul ensembliste et d'atteignabilité en Julia :
  - ▶ utilisé actuellement pour réaliser les expériences d'un papier scientifique
  - ▶ distribution dans un dépôt public prochainement

