

# Introduction à la Recherche en Laboratoire :

## Diffusion d'information sur un graphe

Noé Pion\*

*2A MMIS*

E-mail: noe.pion@gmail.com

### Résumé

Dans cet article, nous étudions deux types de fonctions de transition sur les états d'un graphe représentant un pavage. En particulier, nous étudions leurs propriétés en terme de convergence, et cherchons à en établir des conditions nécessaires. Nous rappelons les notions de base de graphe de chaîne de Markov. Nous cherchons aussi à donner un sens à ces propriétés, avec des analogies simples.

## Introduction

### Cadre du projet

Cette introduction à la Recherche en Laboratoire (IRL) est dirigée par Corinne Touati, chargée de recherche à l'INRIA Montbonnot. Le projet est réalisé en collaboration avec Yann Blanchi, architecte au cabinet Black Mountain Office de Grenoble. Ce projet a pour but d'aboutir sur la conception d'un mur de structures gonflables interconnectées, et qui se gonfleraient dynamiquement en fonction des interactions avec le public. Ces interactions seront dans un premier temps physique. Ce système est inspiré du Pneuduino<sup>?</sup>, développé aux MIT Labs.

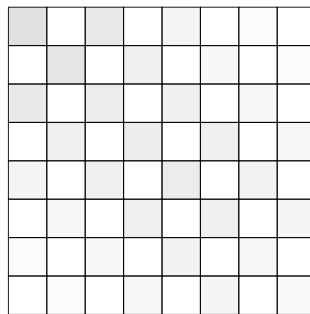
Ce système de structures gonflables réalise un maillage régulier, à base de carrés ou d'héxagones (le cas des triangles n'est pas traité). Le système évolue alors au cours du temps et en fonction des actions qu'il subit avec les spectateurs.

## Objectif de mon travail

Dans le cadre de cette collaboration, mon travail était principalement de construire un simulateur informatique de ce système. Le premier temps du travail a donc été de transcrire le besoin concret de l'architecte en spécificités techniques, et en modélisations mathématiques (Partie 1). La plupart du reste du projet fut consacrée au développement d'un simulateur en Scala et avec Processing (Partie 2). Après avoir remarqué différents comportements sur nos simulations, nous avons essayé d'en chercher les causes, et déterminer des conditions pour que les comportements non désirables ne se produisent pas (Partie 3).

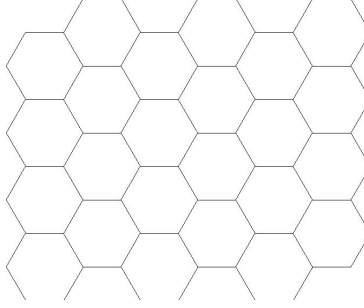
## Partie 1 : Modélisation du problème

Pour modéliser le problème, nous partons de ce que nous savons du problème final : on veut modéliser un pavage de pavés et d'héxagones qui se gonflent et dégonflent. (cf. Scheme 1 et Scheme 2).



Scheme 1: Pavage carré

Une modélisation naturelle est donc de les représenter par un ensemble de sommets  $V$ . À ces sommets, nous lui définissons une fonction état  $\epsilon : V \rightarrow [0, 1]$  où  $\epsilon(v)$  représente l'état de



Scheme 2: Pavage hexagonal

gonflage de notre cellule. 1 étant pleinement gonflé et 0 étant l'absence d'air dans le ballon.

Il faut maintenant s'occuper de la partie dynamique du système. Pour cela, il suffit d'indexer nos fonctions d'états par  $t \in \mathbb{N}$ . On appelle condition initiale la fonction  $\epsilon_0$ . Une des règles de notre système est que l'état suivant de notre ensemble de sommets ne dépend que de l'état précédent. On peut donc définir une fonction de transition qui, en fonction des états précédents, nous donne les états suivants. Une autre règle imposée à notre système est que le comportement d'une cellule n'est influencé que par les cellules voisines, c'est à dire qui le touchent physiquement. Ainsi, un carré aura comme voisin ses 4 carrés avec qui il a des arêtes adjacentes, alors qu'un hexagone aura 6 voisins, sauf dans les cas de bord. On définit donc aussi une application  $vois : V \rightarrow \mathcal{P}(V)$  qui définit les voisins d'un sommet.

Les deux fonctions de transition étudiées dans notre simulation sont la fonction  $max$  qui, tel que pour tout  $v \in V$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , on a  $\epsilon_{t+1}(v) = max_{v' \in vois(v)}(\epsilon_t(v'))$ . L'autre fonction que nous étudions est la moyenne des voisins : pour tout  $v \in V$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , on a  $\epsilon_{t+1}(v) = \frac{\sum_{v' \in vois(v)} \epsilon_t(v')}{|vois(v)|}$ . Nous verrons dans la partie 3 que cette fonction a, en fait, une expression beaucoup plus agréable.

## Partie 2 : Développement du simulateur et simulations

### Développement du simulateur

#### Choix du langage/framework

Pour le développement du simulateur, j'ai choisi Scala pour plusieurs raisons. Premièrement, Scala est compilé en Bytecode Java, et exécuté sur la JVM. Ainsi, toutes les bibliothèques de Java sont disponibles sur Scala, en particulier Processing. De plus, Scala bénéficie d'une forte inférence syntaxique, particulièrement comparé à Java. En contrepartie d'un code plus lent à la compilation, il y a donc beaucoup moins du code qui s'écrit mécaniquement en Java à écrire en Scala. Le dernier avantage concerne l'adoption du paradigme de programmation fonctionnelle dans Scala, en plus d'une approche orientée-objet classique. Cela permet d'avoir, dans le cas de ce problème, un code qui ressemble beaucoup plus à la partie mathématique et formelle du problème. En particulier, les fonctions se passent facilement en argument d'autres fonctions.

Processing permet d'ajouter une partie visualisation à notre programme, avec une gestion d'évènements pour gérer les cliques de la souris. Notre programme est, de cette façon, plus interactif et donc plus facile d'utilisation.

#### Implémentation

À partir de ce qui a été établi en partie précédente, le développement de notre simulateur se fait naturellement.

Premièrement, on implémente toute la modélisation du problème. On crée un objet Cell, qui correspond à un sommet du graphe avec son état. Ensuite, nous définissons deux types de Grid. Une composée de carrés et l'autre d'hexagones. En pratique, l'implémentation est la même : un tableau en 2 dimensions de cellules. Seule la définition de la fonction voisin change. Ici, Scala utilise au maximum le paradigme de la programmation orientée objet. Nous définissons ensuite un mécanisme d'update, qui modifie les états des sommets de la

grille. Cet update prend en paramètre la fonction de mise à jour, utilisant donc le paradigme de la programmation fonctionnelle.

Ensuite, nous implémentons la génération de nos grilles dans des fichiers SVG. Ces fichiers sont utiles pour exporter les résultats de nos simulations, par exemple dans ce document, mais aussi dans les travaux de Yann. On convertit l'état en nuance de gris. 1 étant noir, 0 étant blanc.

Pour finir, nous nous occupons de la partie visualisation et interactivité du code avec Processing. Processing permet de dessiner facilement des carrés. Cependant, il faut définir les hexagones à partir de leurs 6 sommets, et donc trouver leurs positions relatives par rapport au centre. En plus, le maillage n'est pas aussi facile à réaliser que pour des carrés, à cause du "décalage" entre deux lignes consécutives (cf. Figure 1). On implémente donc cette grille à partir de légères modifications depuis ce qui a été développé par Louis Christodoulou<sup>?</sup>. On gère ensuite l'interaction entre les actions de l'utilisateur et ce qui a été fait dans la première partie. Particulièrement, on implémente le changement d'états de cellules à partir de cliques de la souris.

Le code source est disponible sur la page ensiwiki du sujet.

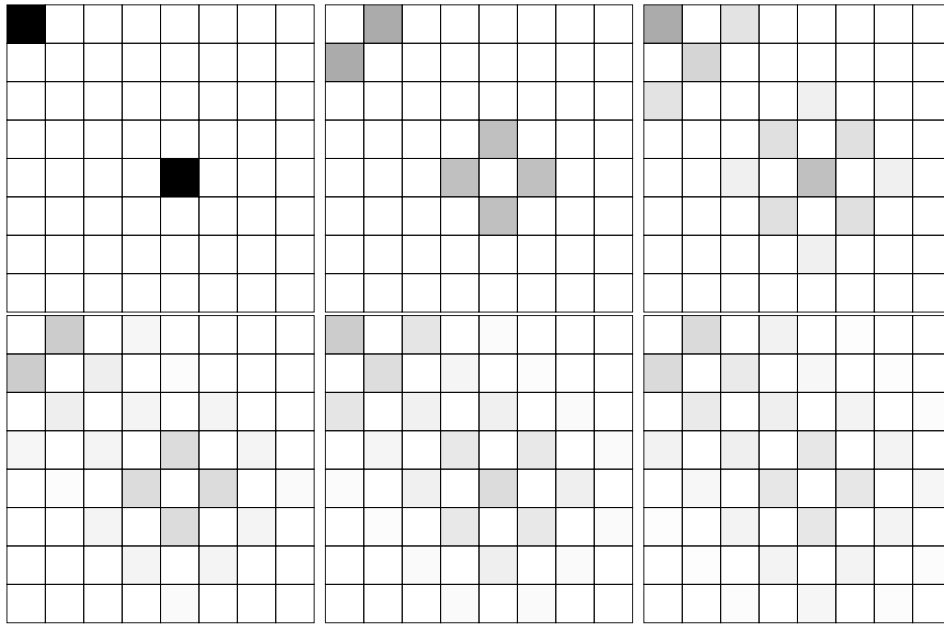
## Simulations et remarques

On commence par simuler une grille carrée. Voici un premier test avec la fonction de transition max :

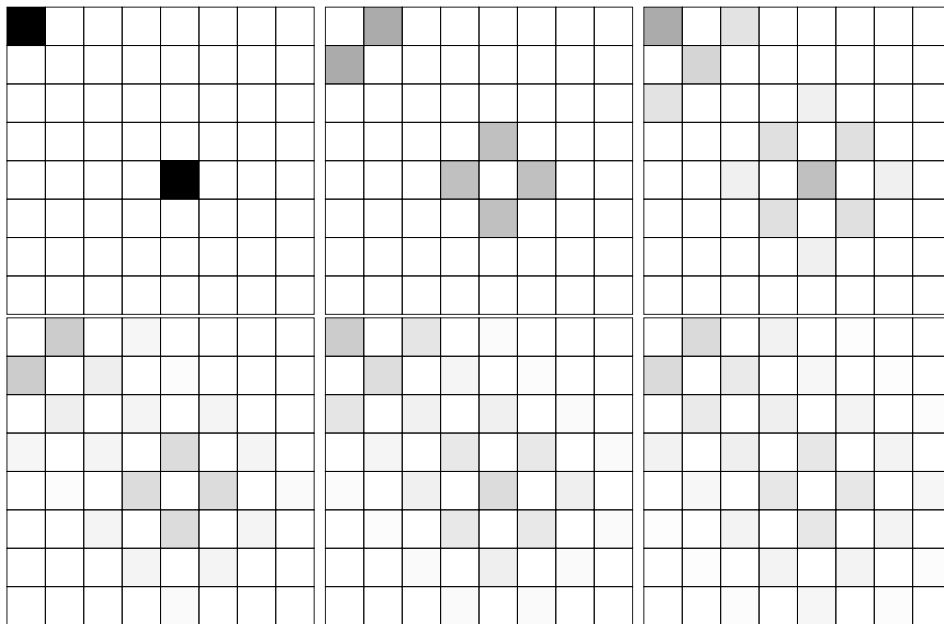
Pour la moyenne, on obtient la figure suivante :

Remarquons un comportement très particulier sur ces simulations : la grille clignote. En effet, on peut découper notre ensemble de cellules en deux. Une est toujours blanche sur les itérations paires, alors que l'autre est toujours blanche sur les itérations impaires. L'ensemble des voisins du premier ensemble, défini comme l'union de chacun des voisins de l'ensemble, est strictement égal au voisin du second ensemble.

Pour un maillage à base d'hexagones, on remarque que, si il y a un clignotement à la



Scheme 3: Maximum pour pavage carré de taille 10x10



Scheme 4: Moyenne pour pavage carré de taille 8x8

première itération, elle disparaît pour les autres itérations et converge vers un état uniforme.

Le clignotement persistant n'est pas du tout souhaitable lors de la réalisation du système gonflable, car il signifie que nos ballons devront constamment se gonfler et se dégonfler, provoquant une forte usure matérielle. De plus, par la nature clignotante du système, il ne semble pas y avoir de convergence du système, ce qui veut dire qu'il peut tourner toute la nuit sans jamais s'arrêter, et donc encore participer à l'usure du matériel. Dans la partie suivante, nous cherchons à déterminer les causes de ces comportements, et à établir des solutions pour qu'ils n'arrivent pas.

## Partie 3 : Etude théorique du système

Dans cette partie, nous étudions les comportements mis en avant par les simulations des exemples précédents. Nous en déterminons les causes et en mettons en avant des propriétés.

### Le cas des carrés

La remarque essentielle est celle établie précédemment : pour un maillage carré, nous pouvons séparer en deux ensembles nos sommets. Appelons les  $V_B$  et  $V_N$ . Alors  $vois(V_N) \cap E_N = vois(E_B) \cap E_B = \emptyset$ . De plus, en définissant, pour tout  $V' \subset V$ ,  $e(V') = \cup_{v' \in V'} vois(v')$ , on a  $vois(V_B) = V_N$  et  $vois(V_N) = V_B$ . Cela revient à dire qu'il existe une 2-coloration pour le graphe  $(V, E)$  qui est construit à partir de  $V$ , et dans lequel il existe une arête dans  $E$  entre  $v_1$  et  $v_2$  si et seulement si les polygones correspondant à  $v_1$  et  $v_2$  ont une arête en commun sur le graphe. Ce graphe est non-orienté.

Soit  $V$  un ensemble de sommets. Pour tout  $V' \subset V$ , on écrit  $\epsilon(V') = \{\epsilon(v') | v' \in V'\}$ .

### Le maximum

**Proposition 1** (Alternance des max.). *Pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,  $max(\epsilon_{t+1}(V_B)) = max(\epsilon_t(V_N))$  et  $max(\epsilon_{t+1}(V_N)) = max(\epsilon_t(V_B))$ .*

*Démonstration.* Soit  $t \in \mathbb{N}$ , on a  $\max(\epsilon_{t+1}(V_N)) = \max_{v \in V_N}(\epsilon_{t+1}(v)) = \max_{v \in V_N}(\max_{v' \in \text{vois}(v)}(\epsilon_t(v')))$ . Or, comme  $\cup_{v \in V_N}(\text{vois}(v)) = \text{vois}(V_N) = V_B$ , on a donc  $\max(\epsilon_{t+1}(V_N)) = \max_{v \in \text{vois}(V_B)}(\epsilon_t(v)) = \max_{v \in V_N}(\epsilon_t(v)) = \max(\epsilon_t(V_N))$ . L'autre partie se démontre de façon symétrique.  $\square$

En particulier, si ce maximum est non-nul pour un des ensembles, et nul pour l'autre aux conditions initiales, alors cette propriété met clairement en évidence l'alternance des maximums, et donc une explication aux phénomènes de clignotements qu'on retrouve sur la grille carrée.

## La moyenne

Pour la moyenne, on peut montrer de façon similaire la propriété suivante :

**Proposition 2.** *Pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,  $\max(\epsilon_{t+1}(V_B)) \leq \max(\epsilon_t(V_N))$  et  $\min(\epsilon_{t+1}(V_B)) \geq \min(\epsilon_t(V_N))$ ,, et de même en inversant  $V_N$  et  $V_B$ .*

Ces inégalités se démontrent comme l'égalité précédente, en écrivant que pour tout  $v \in V_N$ ,  $\min_{v' \in V_B}(\epsilon_t(v')) \leq \epsilon_{t+1}(v) = \frac{\sum_{v'' \in \text{vois}(v)} \epsilon_t(v'')}{|\text{vois}(v)|} \leq \max_{v' \in V_B}(\epsilon_t(v'))$ , en utilisant le fait que les voisins de sommets dans  $V_B$  soient dans  $V_N$ .

Elles nous fournissent des informations sur la nature de l'évolution du système, mais sont un moins précis que l'inégalité précédente. Cependant, remarquons que cela nous fournit le renseignement que, si pour la condition initiale, alors tous les sommets dans  $V_B$  sont d'état nul, alors à l'itération suivante, tous les sommets dans  $V_N$  seront nuls, puis tous ceux dans  $V_B$  ... En effet, si tous les sommets sont nuls, alors l'inégalité sur les maximums nous donne le résultat.

**Remark 1.** *Par récurrence, on peut montrer qu'avec une condition initiale sur les sommets de  $V_B$  nuls, alors les états des sommets de  $V_B$  en temps pairs seront nuls, et ceux de  $V_N$  en temps impairs.*



## Le cas des hexagones

Pour les hexagones, on ne peut pas séparer nos sommets en deux ensembles. Les preuves ne tiennent donc plus, et les égalités et inégalités se dressent dans le cadre plus général.

### Le maximum

**Proposition 3** (Conservation du max.). *Pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,  $\max(\epsilon_{t+1}(V)) = \max(\epsilon_t(V))$*

Cette propriété nous dit que le maximum se conserve, ce qui est une propriété très palpable comme le graphe est convexe. Nous avons cependant perdu toute notion d'alternance.

### La moyenne

**Proposition 4.** *Pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,  $\max(\epsilon_{t+1}(V)) \leq \max(\epsilon_t(V))$  et  $\min(\epsilon_{t+1}(V)) \geq \min(\epsilon_t(V))$ .*

Cette propriété nous indique la décroissance du maximum et la croissance du minimum. Cela pose une base de preuve de la convergence de nos états, mais on perd encore ici la notion de clignotement. Ne plus pouvoir démontrer de clignotement est cependant rassurant car nos simulations semblaient indiquer qu'il n'existait pas de façon répétée sur une grille hexagonale.

## Chaînes de Markov et Matrices Stochastiques au secours de la moyenne

### Mise en évidence d'une Matrice Stochastique

Comme nous l'avions annoncé en Partie 1, la moyenne peut être exprimée de façon plus manipulable. En effet, pour tout  $t \in \mathbb{N}$ ,  $v \in V$ , on a  $\epsilon_{t+1}(v) = \frac{\sum_{v' \in \text{vois}(v)} \epsilon_t(v')}{|\text{vois}(v)|}$ . Cette formule de mise à jour peut s'écrire sous la forme d'un produit matriciel qui fait apparaître une matrice stochastique et une chaîne de Markov.

Notons  $n = |V| > 1$ . On numérote nos sommets dans un ordre quelconque. Soit  $A$  la matrice d'adjacence du graphe  $G = (V, E)$  avec  $(v_i, v_j) \in E$  si et seulement si  $v_i$  et  $v_j$  sont

liés par une arête dans la représentation avec une grille de notre graphe. Soit  $\epsilon_t \in \mathbb{R}^n$  représentant l'état des  $n$  vecteurs à l'instant  $t$ . On note  $\hat{A}$  la matrice obtenue à partir de  $A$ , en divisant chacune de ses composantes par son nombre de composantes non nulles (c'est à dire diviser la colonne  $A_i$  par le nombre de voisins de  $e_i$ , forcément non nul car le graphe est connexe et non réduit à un point). Alors on a,  $\forall t \in \mathbb{N}$ ,  $\epsilon_{t+1} = \epsilon_t \hat{A}$ .

On vérifie alors que  $\hat{A}$  est une matrice stochastique :

- Soit  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, n\}$ .  $a_{i,j} \geq 0$  donc tous les coefficients de  $\hat{A}$  sont aussi supérieurs ou égaux à 0.

- Comme  $G$  est connexe, aucune des lignes de sa matrice d'adjacence n'est nulle. Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . On a  $\sum_j \hat{a}_{i,j} = \sum_j a_{i,j} / |\text{vois}(v_i)|$ . Or, comme sur la ligne  $i$  de  $A$ , il y a exactement  $|\text{vois}(v_i)|$  coefficients non nuls, qui sont égaux à 1, alors cette somme vaut 1.

Nous allons faire une dernière modification dans notre modélisation. On considère maintenant notre grille comme un tore, c'est à dire que les cellules qui sont à l'extrémité gauche sont voisine avec celles de l'extrémité droite, celles en haut avec celles en bas. De cette façon, chaque cellule a donc le même nombre de voisins, c'est à dire 4 pour les carrés, et 6 pour les hexagones. Cela permet de garder constante la somme des états sur l'ensemble des sommets en fonction du temps, et donc nous permet d'améliorer l'expression probabiliste du système. Tout le reste du sujet est traité avec cette modélisation.

Ainsi, nous pouvons étudier l'opérateur moyenne à partir de la théorie, riche, sur les matrices stochastiques et les chaînes de Markov. Cette apparition semble toutefois mystérieuse, car le système que nous avons bâti ne possède aucun aspect aléatoire. Cependant, cette apparition de chaînes de Markov revient à dire qu'il modélise un comportement probabiliste. Dans la prochaine partie, nous lui donnerons une interprétation.

## Interprétation probabiliste

L'apparition de notions de probabilité nous encourage donc interpréter notre système dans ce sens.

Plaçons nous dans la situation initiale où une seule cellule est complètement noire, et toutes les autres sont blanches. Alors l'évolution du système correspond avec l'évolution de la probabilité de trouver une particule, initialement sur la case noire. La particule suit la règle qu'à chaque pas de temps, elle se déplace équiprobablement sur une de ses cellules voisines.

Cette interprétation, très simpliste, permet cependant de comprendre le phénomène de clignotement de grille carrée. Si il existe une 2-coloration de notre graphe, et que la particule est initialement sur une case d'une couleur, alors elle sera, à l'état suivant, sur une des cellules voisine, qui est de l'autre couleur, et ainsi de suite.

Nous pouvons aussi donner une explication à la diminution du maximum des états sur le graphe. Cela correspond à une réduction de la certitude de la présence de la particule, à un endroit donné, au fil du temps.

## Résultats sur les matrices stochastiques appliqués à notre système

Nous allons maintenant utiliser des résultats théoriques sur les matrices stochastiques pour expliquer les apparitions des comportements sur notre système. En particulier, on va s'intéresser à la présence de cycles, et à la convergence de notre système. Les théorèmes suivants ne sont donc pas originaux, et sont des classiques de la littérature. On pourra se reporter au livre de J.Y. Ouyard <sup>?</sup> sur les probabilités pour retrouver les preuves de ces résultats.

**Definition 1** (Loi de probabilité). *Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $N$  dont les éléments sont numérotés de 1 à  $N$ . Soit  $v \in \mathbb{M}_{1,N}(\mathbb{R})$ . On dit que  $v$  est une loi de probabilité sur  $E$  si :*

1.  $\forall v \in \{1, \dots, N\}, v(i) \geq 0$

$$2. \sum_{i=1}^N v(i) = 1$$

**Definition 2** (Loi stationnaire). *Soit  $C$  une chaîne de Markov à  $n$  états, de matrice  $P$ . On dit que  $v$  est une loi stationnaire pour  $C$  ssi :*

1.  $v$  est une loi de probabilité sur l'ensemble des sommets de  $C$  et
2.  $vP = v$

Remarquons que comme  $P$  est à coefficients positifs, la propriété 2. implique que toutes les composantes de  $v$  soient positives. Si on trouve un  $v$  quelconque qui vérifie 2., il suffit donc de le diviser par sa norme 1 pour obtenir une loi de probabilité sur l'ensemble des sommets de  $C$ , et donc une loi stationnaire. Trouver une loi stationnaire pour une chaîne de Markov revient donc à chercher si  $P$  a comme valeur propre 1.

En fait, le théorème suivant nous indique l'existence d'une telle loi :

**Theorem 1.** *Soit  $C$  une chaîne de Markov. Alors il existe une loi stationnaire pour  $C$ .*

Cependant, nous ne savons pas encore si cette chaque loi de probabilité initiale converge vers cette loi stationnaire.

Une autre notion très rattachée à notre problème est celle de période. On rappelle que  $p_{i,j}^n \neq 0$  si et seulement si il existe un chemin de  $i$  à  $j$  composé de  $n$  états. On définit alors la notion de période d'un sommet.

**Definition 3** (Période). *Soit  $i \in E$ , on appelle période de  $i$  le nombre  $d(i) = \text{PGCD}(n \in \mathbb{N} * |p_{i,i}^n > 0)$ ). Par convention, si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_{i,i}^n = 0$ , alors  $d(i) = 0$ .*

On remarque alors immédiatement que tous les sommets de notre grille carrée sont de période 2, alors que les sommets de notre grille hexagonale sont de période 1 (ou aussi appelé apériodique).

Nous avons aussi besoin de la définition suivante :

**Definition 4.** Soit  $C$  une chaîne de Markov. Elle est dite irréductible si pour tout  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, N\}$ , il existe un  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $p_{i,j}^n \neq 0$ .

On peut alors utiliser le résultat suivant :

**Theorem 2.** Soit  $C$  une chaîne de Markov irréductible et apériodique. Alors :

1. Il existe une unique loi stationnaire  $v$  sur les états de  $C$ .
2. Pour toute loi initiale  $\pi$ ,  $\pi P^n$  converge vers  $v$ .

Ainsi, on montre que n'importe quelle condition initiale pour la grille formée d'hexagones converge. En fait, par la décroissance du maximum, montré en début de cette partie, et par le fait que les  $\hat{A}^n$  sont toutes des matrices stochastiques car elles sont stables par produit, alors la loi stationnaire est la loi pour laquelle chacune de ses composante est égale à  $1/N$ .

Cet état stationnaire vers lequel convergent toutes les conditions initiales est celui qui maximise l'entropie du graphe. C'est une propriété très intéressante car cela signifie que notre système tend, en reprenant l'analogie de la particule, vers une incertitude maximum de la position de la particule. Intuitivement, cela signifie qu'après un grand nombre de temps, si la particule se déplace dans toutes les directions sans direction particulière, alors la particule peut se retrouver dans n'importe laquelle des cellules avec la même probabilité.

Pour traiter le cas du carré, on peut remarquer que, si  $P$  est de période 2, alors  $P^2$  est de période 1, et donc apériodique. Seulement, la chaîne de Markov associée n'est alors plus irréductible (on a deux espaces stables, correspondant à  $E_B$  et  $E_N$ ). Cependant, si on définit les restrictions de cette application à chacun des espaces stables, alors on peut appliquer le théorème précédent. Il ne nous indique plus cependant une convergence du système, ce qui aurait été contraire avec les observations, mais une convergence des itérées paires et impaires.

Utilisons maintenant un dernier résultat, trouvé dans le recueil d'exercices d'oraux X-ENS de Francinou, Gianella et Nicolas ? :

**proposition 1.** Soit  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . Si pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $a_{i,i} \neq 0$ , alors la seule valeur propre complexe de module 1 de  $A$  est 1.

Cette proposition implique qu'une telle matrice n'a pas de cycle. Cela suggère une modification à la formule de la moyenne pour le carré, dont on a expliqué le clignotement précédemment. En effet, posons  $x \in ]0, 1]$  si on transforme notre moyenne en  $\epsilon_{t+1}(v) = t * \epsilon_x(v) + (1 - x) * \sum_{v' \in \text{vois}(v)} \epsilon_t(v') / |\text{vois}(v)|$ , alors la matrice de transition devient  $xI_n + (1 - x)\hat{A}$ . On vérifie facilement qu'elle est encore stochastique car l'ensemble des matrices stochastiques est convexe. Cette matrice vérifie la propriété précédente, elle n'a donc pas de cycle. Elle vérifie en fait même les conditions du théorème précédent, ce qui nous assure que le système converge.

## Conclusion et ouvertures

Dans cette IRL, nous avons donc modélisé un problème concret, développé un simulateur qui nous a permis d'observer des comportements non désirés. Nous avons ensuite mené une étude théorique de ce système pour proposer des explications de ces comportements, ainsi que des solutions. Nous avons particulièrement insisté sur l'interprétation des résultats, pour les rendre palpable pour un public non scientifique.

Ce parti-pris implique que les résultats annoncés n'ont pas tous la preuve, ou même l'idée de la preuve. Les preuves sur les matrices stochastiques sont toutes trouvables dans les livres indiqués en bibliographie, et celles concernant les cas spécifiques des systèmes étudiés se déduisent de manipulations élémentaires sur les expressions, de la même façon que la toute première preuve.

Concernant les pistes d'ouvertures, seul un état stationnaire a été exprimé (hors celui pour le maximum, qui n'est pas complètement passionnant). Nous avons montré que les itérations paires et impaires de la grille carrée convergent, mais pas la limite. De même, pour la dernière amélioration proposée, nous n'avons pas la limite. Des simulations semblent indiquer que les limites correspondent toujours à un maximum d'entropie, comme cela a été trouvé pour la grille d'hexagones.

De plus, à partir de ce simulateur, nous aurions pu simuler puis étudier beaucoup d'autres comportements, le plus connu d'entre eux étant celui du Jeu de la vie de Conway. Cet exemple possède une littérature pléthorique, qui ne doit pas être trop compliqué à implémenter avec ce qui a déjà été fait.

## Remerciements

Je tiens à remercier Corinne Touati qui m'a accueilli à l'INRIA. J'ai apprécié être accompagné par ton enthousiasme et ta compréhension. Encore merci d'avoir supporté mon agenda tournant, causé par un planning de cours variant. Echanger avec toi sur tes sujets de recherche et le monde de la recherche, de façon plus générale, a peut-être fait naître une vocation chez moi.

Merci aussi à Yann, Blanchi, qui m'a fait découvrir ses travaux d'architecture. Le projet n'aurait pas existé sans toi, et j'espère qu'il arrivera à son terme. Je crois que nous t'avons peut-être perdu quand nous sommes passés dans des considérations trop mathématiques sur le système développé. J'ai essayé d'en mettre le moins possible dans ce rapport, et d'insister sur les interprétations.

Merci aussi à l'équipe de l'Ensimag responsable de l'IRL. Même si, étant en MMIS, cela peut-être assez frustrant de ne pas avoir de certitude sur quand on pourra se rendre au laboratoire, par manque de plage horaire réservée. L'IRL a été un premier pas dans le monde de la recherche très enrichissant. J'aurais même espéré plus pouvoir en profiter.

## Références

.